

# IMO-Herbstzirkus 2025: Graphen

Christian Bernert

## 1 Ein Thema mit Ecken und Kanten

In diesem Brief soll es um *Graphen* gehen. Dabei handelt es sich letztlich um eine sehr nützliche *Sprache*, um kombinatorische Probleme zu untersuchen. Viele Kombinatorik-Aufgaben lassen sich in diese Sprache übersetzen (was natürlich in den allermeisten Fällen nur der erste Schritt zur Lösung der Aufgabe ist).

Auch wenn den meisten die Grundbegriffe dieser Sprache bereits vertraut sein dürften, sollten wir uns zunächst auf einige Vokabeln einigen.

Ein **Graph** ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei  $V$  die Menge von **Knoten** ist und  $E$  eine Teilmenge von (ungeordneten) Paaren von zwei verschiedenen Knoten ist, die wir uns als durch eine **Kante** verbunden vorstellen.

In dieser Grundversion unserer Sprache gibt es also zunächst weder doppelte Kanten zwischen Knoten, noch Kanten, die einen Knoten mit sich selbst verbinden, noch haben Kanten eine Richtung. Man könnte auch von *einfachen ungerichteten Graphen* sprechen. Letztlich gibt es Graphen aber in vielerlei Geschmacksrichtungen, die je nach zu untersuchendem Problem auf natürliche Weise nützlich sein können. Im Folgenden gehen wir meist implizit davon aus, dass unser Graph endlich viele Knoten enthält.

Wir wollen direkt noch einige weitere Begriffe definieren:

- Der **Grad**  $\deg(v)$  eines Knotens  $v$  ist die Anzahl der Kanten an diesem Knoten.
- Ein **Weg** ist eine Folge von Knoten, die jeweils durch eine Kante verbunden sind.
- Ein Graph ist **zusammenhängend**, falls es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt. Im Allgemeinen lässt sich ein Graph in **Zusammenhangskomponenten** zerlegen, die jeweils maximale zusammenhängende Teile des Graphen bilden.
- Ein **Kreis** ist ein Weg, bei dem Start- und Endknoten übereinstimmen, sonst aber kein Knoten mehrfach vorkommt.
- Ein Graph ohne Kreise heißt **Wald**. Ein zusammenhängender Wald heißt **Baum**. (Ein Wald besteht also aus einem oder mehreren Bäumen!)

### 1.1 Von Schranken im Wald und einem nützlichen Mantel

Während ein Graph mit  $n$  Knoten allgemein eine beliebige Anzahl an Kanten zwischen 0 (*leerer Graph*) und  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  (*vollständiger Graph  $K_n$* ) haben kann, zeigt die folgende Aussage, dass die Bedingung, kreisfrei zu sein, bereits eine deutlich stärkere Einschränkung liefert:

**Satz:** Ein Wald mit  $n$  Knoten hat höchstens  $n - 1$  Kanten. Gleichheit gilt genau für Bäume. Umgekehrt: Ein Graph, der mindestens so viele Kanten wie Knoten enthält, muss einen Kreis enthalten!

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass jeder Baum mit  $n$  Knoten genau  $n - 1$  Kanten enthält (warum?). Dies zeigen wir per Induktion über  $n$ , wobei die Aussage für  $n = 1$  trivial ist. Die Aussage sei nun für alle Bäume mit  $n - 1$  Knoten bekannt und wir betrachten einen Baum mit  $n$  Knoten. Haben alle Knoten Grad mindestens 2, so können wir an einem Knoten starten, zu einem benachbarten gehen, von dort über eine weitere Kante weitergehen usw. Da der Graph endlich ist, kommen wir irgendwann an einen Knoten, an dem wir schon waren, haben also einen Kreis gefunden, Widerspruch! Also gibt es mindestens einen Knoten mit Grad 1. Entfernen wir diesen (und die angrenzende Kante) aus dem Graphen, erhalten wir einen Baum mit  $n - 1$  Knoten, der nach Induktionsvoraussetzung genau  $n - 2$  Kanten enthält, folglich hatte unser Baum auf  $n$  Knoten vor dem Entfernen genau  $n - 1$  Kanten. Das war zu zeigen.  $\square$

Wir haben direkt zwei typische Beweisstrategien der Graphentheorie benutzt: **Vollständige Induktion** (hier über die Anzahl der Knoten, ggf. aber auch über andere Parameter wie die Anzahl der Kanten, die Anzahl der Kreise usw.) und **algorithmische Argumente** (hier die iterative Konstruktion eines Kreises).

Diese Aussage ist erstaunlich nützlich, zum Beispiel lässt sich damit sehr leicht eine Aufgabe abfrühstücken, die (bei genauerem Hinsehen) äquivalent zu einer Aufgabe aus der diesjährigen Bundesrunde ist:

**Aufgabe:** Gegeben sei eine Menge von  $n$  Zahlen  $a_1, \dots, a_n > 0$ . Zeige, dass unter den Zahlen  $\frac{a_i}{a_j}$  höchstens  $n - 1$  verschiedene Primzahlen sind.

**Lösung:** Einen Widerspruch erwartend nehmen wir an, dass es unter den Quotienten mindestens  $n$  verschiedene Primzahlen gibt. Wir bauen uns einen Graphen wie folgt: Die Knoten seien die  $n$  Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ . Für jede der  $n$  Primzahlen  $p$  suchen wir uns ein Paar  $(i, j)$  mit  $\frac{a_i}{a_j} = p$  aus und fügen eine Kante zwischen  $a_i$  und  $a_j$  hinzu. Mithin hat unser Graph  $n$  Knoten und  $n$  Kanten und enthält somit einen Kreis. Wir zeigen nun, dass dies nicht möglich ist: Indem wir alle Zahlen mit einer geeigneten Konstanten multiplizieren, können wir annehmen, dass alle Zahlen in diesem Kreis natürliche Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler 1 sind. Sei  $p$  eine der Primzahlen, die zu einer der Kanten in diesem Kreis gehört. Dann ist genau eine der Zahlen an dieser Kante durch  $p$  teilbar, die andere nicht. Laufen wir auf dem anderen Teil des Kreises von der einen Zahl zur anderen, ändert sich die Teilbarkeit durch  $p$  aber an keiner Stelle, Widerspruch!  $\square$

Für unser Argument am Ende war es entscheidend, dass wir zu jeder Primzahl nur **eine** Kante eingezeichnet haben (auch wenn es ggf. mehrere Paare mit dem gleichen Quotienten gibt). Man sieht also, dass es entscheidend sein kann, ein Problem *auf die richtige Weise* in ein graphentheoretisches zu übersetzen!

Wir wollen uns noch etwas mehr mit Fragen beschäftigen, wie groß ein Graph mit einer bestimmten Struktur höchstens sein kann. Das zugehörige Gebiet wird auch als **extremale Graphentheorie** bezeichnet. Zum Beispiel beschäftigt sich der **Satz von Turán** aus dem Jahr 1941 damit, wie viele Kanten ein Graph höchstens haben kann, der für ein bestimmtes  $d$  keine  $d$  Knoten besitzt, die paarweise miteinander verbunden sind (also keinen  $K_d$ , einen vollständigen Graphen auf  $d$  Knoten, enthält). Der einfachste Fall  $d = 3$ , wo der Graph kein *Dreieck* enthalten darf, wurde bereits einige Zeit vor Turán bewiesen:

**Satz von Mantel:** Ein Graph auf  $n$  Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens  $\frac{n^2}{4}$  Kanten.

Wir geben zwei Beweise, um die Nützlichkeit der kombinatorischen Grundprinzipien **Induktion** und **Extremalprinzip** zu verdeutlichen.

**Erster Beweis:** Wir verwenden Induktion über  $n$ , allerdings wird der Induktionsschritt diesmal von  $n - 2$  nach  $n$  gehen, d.h. wir benötigen zwei Induktionsanfänge für  $n = 1$  und  $n = 2$ , die aber beide trivial sind. Wir betrachten nun einen Graphen mit  $n$  Knoten, der keine Dreiecke enthält. Enthält er gar keine Kanten, sind wir sofort fertig. Andernfalls betrachten wir zwei beliebige Knoten  $x$  und  $y$ , die mit einer Kante verbunden sind. Nun darf es keinen dritten Knoten geben, der mit beiden verbunden ist, sonst hätten wir ein Dreieck. Folglich gibt es insgesamt höchstens  $n - 1$  Kanten, die an  $x$  oder  $y$  beginnen oder enden (nämlich von jedem der übrigen  $n - 2$  Knoten höchstens eine und außerdem die zwischen  $x$  und  $y$ ). Entfernen wir nun  $x$  und  $y$  (und die angrenzenden Kanten), haben wir einen dreiecksfreien Graphen auf  $n - 2$  Knoten, der mithin nach Annahme höchstens  $\frac{(n-2)^2}{4}$  Kanten enthält. Insgesamt hatte unser Graph damit maximal

$$\frac{(n-2)^2}{4} + (n-1) = \frac{n^2}{4}$$

Knoten, was zu zeigen war. □

**Zweiter Beweis:** Wir betrachten einen Knoten  $v$  mit maximalem Grad  $d$ . Die Menge seiner Nachbarn sei  $N(v) \subset V$  mit  $|N(v)| = d$ . Weil der Graph keine Dreiecke enthält, gibt es keine Kanten innerhalb von  $N(v)$ . Jede Kante geht also von mindestens einem der  $n - d$  Knoten aus, die nicht in  $N(v)$  sind. Da diese alle Grad höchstens  $d$  haben, gibt es maximal  $d(n - d)$  Kanten, was bekanntlich (z.B. nach AM-GM) höchstens  $\frac{n^2}{4}$  ist. □

Es ist nicht schwer (und eine gute Übung), sich anhand dieser Argumente zu überlegen, dass der Gleichheitsfall für gerade  $n$  genau dann eintritt, wenn der Graph aus zwei Gruppen von  $d = n/2$  Knoten besteht, die jeweils mit allen Knoten aus der anderen Gruppe, aber nicht mit denen aus der eigenen Gruppe verbunden sind. Dies ist der *vollständige bipartite Graph*  $K_{d,d}$  (bipartiten Graphen werden wir später noch einmal begegnen).

## 1.2 Von spannenden Bäumen und ungeraden Graden

Zu Beginn haben wir uns überlegt, dass ein Baum auf  $n$  Knoten immer genau  $n - 1$  Kanten enthält. Tatsächlich gilt auch eine Art Umkehrung: Hat ein zusammenhängender Graph auf  $n$  Knoten genau  $n - 1$  Kanten, so ist er ein Baum.

Dies kann man sich z.B. so überlegen: Ohne Kanten besteht der Graph aus  $n$  Zusammenhangskomponenten. Jede eingezeichnete Kante verbindet höchstens zwei Komponenten, deren Zahl sinkt also um höchstens 1. Damit der Graph durch Einzeichnen von  $n - 1$  Kanten zusammenhängend wird, muss die Zahl in jedem Schritt um 1 sinken, d.h. jede neu eingezeichnete Kante verbindet zwei Zusammenhangskomponenten und kann damit keinen Kreis erzeugen.

Mit einem ähnlichen Argument lässt sich zeigen, dass man in jedem zusammenhängenden Graphen auf  $n$  Knoten genau  $n - 1$  Kanten auswählen kann, die als Teilgraph alle Knoten verbinden, mithin einen Baum auf diesen  $n$  Knoten bilden, einen sogenannten **Spannbaum**.

**Satz:** Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen Spannbaum.

**Beweis:** Wir beginnen bei einem beliebigen Knoten und wählen von diesem ausgehend eine Kante aus. Bilden die zwei nun verbundenen Graphen noch nicht die gesamte Knotenmenge, muss es (wegen des Zusammenhangs) eine Kante geben, die von einem der beiden zu einem weiteren führt. Diese wählen wir als nächstes aus. Im nächsten Schritt wählen wir eine Kante, die von einem der drei nun verbundenen Knoten zu einem noch nicht verbundenen führt usw. Da wir in jedem Schritt genau einen neuen Knoten verbinden, erhalten wir nach  $n - 1$  Schritten einen zusammenhängenden Teilgraphen, der nach dem obigen Argument automatisch ein Baum ist.  $\square$

Tatsächlich gibt es typischerweise viele verschiedene Möglichkeiten, einen Spannbaum zu konstruieren. Die **Cayley-Formel** sagt z.B., dass der vollständige Graph auf  $n$  Knoten (bei dem alle Kanten eingezeichnet sind), genau  $n^{n-2}$  Spannbäume besitzt.

In der Praxis sind zwei algorithmische Verfahren besonders nützlich:

- Bei der **Tiefensuche** wird vom ersten Knoten ausgehend solange entlang einer Kette von Knoten weiter gesucht, bis diese endet bzw. von hier aus kein neuer Knoten mehr „entdeckt“ werden kann. Dann gehen wir einen Schritt zurück und versuchen von hier aus weiter zu gehen usw.
- Bei der **Breitensuche** werden zunächst alle Nachbarn des ersten Knoten verbunden, dann alle deren Nachbarn usw.

Auch für die Verwendung von Spannbäumen in Olympiade-Aufgaben kann es nützlich sein, einen Spannbaum zu verwenden, der mit einer bestimmten Methode konstruiert wurde. Zum Beispiel hat ein Spannbaum, der mit einer Breitensuche erzeugt wurde, immer die Eigenschaft, dass für einen Knoten unserer Wahl (nämlich den Ausgangsknoten) alle angrenzenden Kanten im Spannbaum enthalten sind.

Als kleine Anwendung wollen wir die folgende Aussage zeigen, die zwar ziemlich offensichtlich klingt, aber mit der richtigen „Technologie“ deutlich leichter zu erledigen ist als ohne.

**Aufgabe:** Gegeben sei ein zusammenhängender Graph. Zeige, dass es einen Knoten gibt, für den der Graph nach Entfernen dieses Knotens (und seiner angrenzenden Kanten) immer noch zusammenhängend ist.

**Lösung:** Wir wählen einen Spannbaum des Graphen und entfernen ein Blatt.  $\square$

Hier sollten wir erklären, dass ein **Blatt** eines Baums ein Knoten mit Grad 1 ist. Warum enthält jeder Baum ein Blatt? Ein möglicher Weg ist es, über die nützliche Formel

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

zu argumentieren, die direkt durch doppeltes Abzählen der Kanten folgt. Hätte jeder Knoten Grad mindestens 2, würde  $|E| \geq |V|$  folgen, was bei einem Baum nicht der Fall ist.

Aus dieser Formel folgt übrigens auch sofort, dass es in einem beliebigen Graphen immer gerade viele Knoten mit ungeradem Grad gibt!

### 1.3 Von gierigen und noch besseren Algorithmen

In diesem Abschnitt wollen wir uns noch einmal mit algorithmischen Ansätzen in der Graphentheorie beschäftigen und zwar anhand der folgenden Aufgabe aus der Landesrunde 2020:

**Aufgabe:** Zwischen den Orten einer Insel verlaufen einige Feldwege, die von Spaziergängern genutzt werden. Jeder Feldweg beginnt an einem Ort und endet an einem anderen Ort, wobei von jedem Ort genau drei Wege ausgehen. Um das touristische Angebot der Insel zu erweitern, sollen einige dieser Feldwege zu Radwegen ausgebaut werden, ohne aber die Spaziergänger zu sehr zu benachteiligen.

Zeige, dass es möglich ist, dies so zu tun, dass anschließend von jedem Ort mindestens ein Radweg und ein weiterhin unausgebauter Feldweg ausgehen.

**Lösung:** Ein möglicher erster Ansatz wäre wie folgt: Wir fangen zunächst irgendwo an, einen Radweg zu bauen. Solange es noch Orte gibt, die noch keinen Radweg haben, wählen wir einen der drei von ihnen ausgehenden Wege aus und bauen ihn zu einem Radweg aus. Das Problem bei diesem **gierigen Algorithmus** ist, dass es dabei passieren kann, dass irgendwann ein Ort drei Radwege bekommt. Selbst wenn wir versuchen, den neu gebauten Weg jeweils geschickt zu wählen, kann es passieren, dass wir irgendwann in eine Sackgasse kommen, wo wir noch nicht fertig sind, aber auch keinen neuen Weg mehr bauen können, ohne die Bedingung kaputt zu machen.

Der naive gierige Algorithmus stellt sich also als zu unflexibel heraus, um die Aufgabe zu lösen. Dies hängt unter anderem damit zusammen, dass wir uns auf eine sehr asymmetrische Weise dazu entschieden haben, immer nur neue Radwege zu bauen, aber sie nie wieder zu Feldwegen umzubauen, obwohl die ursprüngliche Aufgabe bis auf die Ausgangssituation komplett symmetrisch in den beiden Typen von Wegen ist. Es ist aber klar, dass die Ausgangssituation gar keine Rolle spielt. Wir formulieren die Aufgabe nun symmetrischer und übersetzen sie gleichzeitig in die Sprache der Graphentheorie:

Wir haben also einen (endlichen) Graphen, bei dem die Knoten den Orten und die Kanten den Wegverbindungen entsprechen. Die Voraussetzung ist, dass jeder Knoten Grad 3 hat. Wir wollen die Kanten nun derart in zwei Farben färben, dass an jedem der Knoten jede Farbe mindestens einmal vorkommt.

Statt nun vom ungefärbten Graphen auszugehen und diesen Schritt für Schritt einzufärben (bis wir ggf. in eine Sackgasse geraten), können wir ausgehend von einer beliebigen Färbung versuchen, Schritt für Schritt Kanten derart umzufärben, dass wir der gesuchten Färbung näher kommen.

Als gutes Maß für das „Näherkommen“ bietet es sich an, die Anzahl der Orte zu betrachten, die bereits die Bedingung erfüllen, dass beide Farben dort vorkommen. Nennen wir diese Orte *gut*, die anderen *schlecht*. Können wir die Anzahl der schlechten Orte Schritt für Schritt verringern, wird sie irgendwann bei 0 ankommen und wir haben gewonnen.

Dazu betrachten wir einen schlechten Ort. Wir können dafür sorgen, dass dieser Knoten gut wird, indem wir eine der drei Kanten umfärben. Dabei wird die Anzahl der schlechten Orte kleiner, es sei denn der an dieser Kante angrenzende Ort war vorher gut, jetzt aber schlecht. Dann können wir allerdings wieder eine der beiden anderen Kanten umfärben und den zweiten Ort damit gut machen. Dies wiederholen wir mit dem dritten, dem vierten Ort usw., bis wir an einen Ort kommen, der durch das Umfärben nicht schlecht wird. Angenommen, dies würde nie passieren, d.h. wir müssten unseren Schritt unendlich oft wiederholen. Da der Graph endlich ist, kommen wir dann irgendwann an einen Ort, an dem wir schon waren (nicht unbedingt der Anfangsort). Betrachten wir das erste Mal, dass dies passiert, wissen wir, dass wir zu diesem Ort auf einem Weg kommen, den wir zuvor noch nicht umgefärbt haben. Dann können aber nach Konstruktion die beiden anderen Wege an diesem Ort nicht die gleiche Farbe haben, der Ort wird also nicht schlecht!

Damit ist gezeigt, dass wir durch eine endliche Kette solcher Umfärbungen stets die Anzahl der schlechten Orte verringern können. Wiederholen wir dies oft genug, haben wir insgesamt nach endlich vielen Schritten unser Ziel erreicht.  $\square$

Wir waren hier etwas unvorsichtig, denn in der Aufgabenstellung wurde nicht ausgeschlossen, dass es zwischen zwei Orten auch mehr als einen Weg geben kann. In diesem Fall wird der resultierende Graph nicht mehr *einfach* sein. Tatsächlich ist dies für unser Argument aber kein Problem, wenn man es noch einmal genau durchgeht. Grundsätzlich können solche vermeintlichen Kleinigkeiten aber durchaus entscheidend sein, insofern sollte man darauf beim Schreiben und auch beim Korrekturlesen der eigenen Lösung Obacht geben.

## 1.4 Aufgaben

Die Aufgaben sollten etwa nach Schwierigkeit geordnet sein und alle mit den Inhalten dieses Briefes lösbar sein.

### Aufgabe 1.1:

- Zeige, dass es in jedem endlichen Graphen zwei Knoten mit dem gleichen Grad gibt.
- Für welche  $n$  stimmt die folgende Aussage? In jedem Graphen mit  $n$  Knoten gibt es zwei Knoten mit dem gleichen Grad sowie einen dritten Knoten, mit dem entweder beide verbunden oder beide nicht verbunden sind.

**Aufgabe 1.2:** Wir betrachten einen Graphen mit 2023 Knoten, die alle Grad mindestens 45 haben. Zeige, dass es einen Kreis der Länge 4 gibt.

**Aufgabe 1.3:** Wie viele Kanten kann ein Graph auf  $n$  Knoten maximal haben, der keinen Kreis der Länge mindestens 4 besitzt?

**Aufgabe 1.4:** Bestimme die maximale Anzahl an Kanten, die ein zusammenhängender Graph auf  $n$  Knoten mit der folgenden Eigenschaft haben kann: Für jeden Kreis in diesem Graphen ist der Graph nach Entfernen aller Kanten dieses Kreises nicht mehr zusammenhängend.

## 2 Von Wegen (und Kreisen)

Als nächstes wollen wir uns mit zwei verschiedenen Fragestellungen beschäftigen, bei denen es darum geht, einen Graph einmal komplett zu durchlaufen.

### 2.1 Von Brücken, Häusern und Kamelen

Die erste davon wurde 1736 von Leonhard Euler erfunden, als er sich fragte, ob es möglich ist, einmal durch Königsberg zu laufen und dabei jede der sieben Brücken genau einmal zu überqueren. Mit seiner Lösung erfand Euler letztlich das Gebiet der Graphentheorie!

Ein **Eulerweg** in einem Graphen ist ein Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal benutzt. Ein **Eulerkreis** ist ein Eulerweg, dessen Start- und Endknoten übereinstimmen.

Obacht! Ein Eulerkreis darf also Knoten mehrfach durchlaufen, ist mithin kein Kreis im zu Beginn definierten Sinn.

Man kann es sich auch so vorstellen, dass ein Eulerweg eine Möglichkeit beschreibt, die Kanten des Graphen in einem Zug einzuzichnen, ohne den Stift abzusetzen (und ohne eine Kante doppelt zu zeichnen). Das berühmteste Beispiel dieser Art ist natürlich das *Haus des Nikolaus*.

Wie beim Königsberger Brückenproblem kann man sich nun für einen beliebigen gegebenen Graphen fragen, ob dieser einen Eulerweg oder sogar einen Eulerkreis besitzt. Sicherlich muss der Graph zusammenhängend sein und in jeden Knoten (bzw. bei einem Eulerweg jeder Knoten außer dem Start- und dem Zielknoten) muss der Weg genau so oft hineingehen wie hinausgehen, er muss also geraden Grad haben. Tatsächlich sind diese (sehr einfach zu überprüfenden) Bedingungen auch bereits ausreichend:

**Satz:** Ein Graph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn er zusammenhängend ist und jeder Knoten geraden Grad besitzt. Er besitzt genau dann einen Eulerweg, wenn er zusammenhängend ist und maximal zwei Knoten ungeraden Grad haben.

Für diesen Satz ist es, wie wir gleich im Beweis sehen werden, kein Problem, wenn der Graph Mehrfachkanten oder Schleifen hat.

**Beweis:** Wir haben uns bereits überlegt, dass die Bedingungen notwendig sind. Ist nun ein Graph zusammenhängend und jeder Knoten hat geraden Grad, so wollen wir einen Eulerkreis konstruieren.

Dazu wollen wir als ersten Schritt einen beliebigen Graphen, bei dem alle Knoten geraden Grad haben (der aber nicht notwendigerweise zusammenhängend ist), in (ggf. mehrere) geschlossene Kantenzüge zerlegen, sodass jede Kante genau einmal verwendet wird. Um dies zu tun, beginnen wir an einem beliebigen Knoten mit  $\text{Grad} \geq 2$  und laufen von hier aus solange entlang von Kanten, die wir noch nicht verwendet haben, wie möglich. Weil jeder Knoten geraden Grad hat und wir immer gerade viele Kanten an einem Knoten durchlaufen, muss das Ende dieses Wegs mit seinem Startknoten übereinstimmen. Wir haben also einen geschlossenen Kantenzug gefunden. Nun können wir dessen Kanten entfernen und das Argument wiederholen, wobei die Bedingung der geraden Grade erhalten bleibt.

Im zweiten Schritt wollen wir nun aus den ggf. mehreren Kantenzügen einen machen, jetzt unter der Voraussetzung, dass der Graph zusammenhängend ist. Gibt es mehr als einen Kantenzug, so muss es zwei geben, die einen gemeinsamen Knoten haben. Dann kann man aber die beiden Kantenzüge beim Durchlaufen dieses Knotens aufschneiden und so überkreuz zusammenkleben, dass daraus ein Weg entsteht. Mit diesem Schritt können wir die Anzahl der Kantenzüge verringern. Indem wir ihn wiederholen, erreichen wir also irgendwann eine Situation, in der alle Kanten von einem gemeinsamen geschlossenen Kantenzug durchlaufen werden, dem gesuchten Eulerkreis!

Für den Eulerweg müssen wir nun zum Glück nicht alles noch einmal wiederholen, sondern es gibt einen schönen Trick: Haben alle Knoten geraden Grad, gibt es wie eben gezeigt sogar einen Eulerkreis, der damit auch ein Eulerweg ist. Weil es gerade viele Knoten mit ungeradem Grad gibt, ist der einzige andere Fall, dass es genau zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt. Dann fügen wir künstlich eine Hilfskante zwischen diesen beiden Knoten hinzu<sup>a</sup>, sodass alle Knoten geraden Grad haben und wir einen Eulerkreis finden. Entfernen wir schließlich aus dem Eulerkreis wieder die Hilfskante, so haben wir immer noch einen Eulerweg durch die ursprünglichen Kanten. Fertig!  $\square$

<sup>a</sup>die ggf. eine Mehrfachkante erzeugt, auch wenn es vorher keine gab

Der Trick, Kanten oder Knoten künstlich hinzuzufügen, dann eine Struktur (hier den Eulerkreis) zu finden und die Kanten dann wieder zu entfernen, ist erstaunlich häufig nützlich. Es ist letztlich eine Instanz des *17-Kamele-Tricks*.

Wir lösen nun die Feldweg-Aufgabe aus dem letzten Abschnitt noch einmal mit Kamelen:

**Zweite Lösung der Feldweg-Aufgabe:** O.B.d.A. ist der Graph der Inselorte und -wege zusammenhängend (sonst kümmern wir uns um jede Komponente einzeln). Da jeder Knoten Grad 3 hat, muss es gerade viele Knoten geben. Diese können wir in Paare aufteilen, die wir jeweils durch eine zusätzliche Kante verbinden (auch wenn es die schon gab, d.h. wir erzeugen ggf. Mehrfachkanten). Nun hat jeder Knoten Grad 4, es gibt also einen Eulerkreis. Nach der Gradformel aus dem letzten Abschnitt ist die Anzahl der Kanten doppelt so groß wie die der Knoten, insbesondere also gerade. Damit können wir die Kanten des Eulerkreises abwechselnd mit den beiden Farben färben. So hat jeder Knoten genau zwei Kanten jeder Farbe. Entfernen wir die Hilfskanten wieder, kommt immer noch an jedem Knoten jede Farbe mindestens einmal vor. Ziel erreicht!  $\square$

## 2.2 Vom Handlungsreisen und vom Karten-Raten

Die zweite Fragestellung sieht auf den ersten Blick sehr ähnlich aus wie die nach Eulerwegen bzw. -kreisen, ist aber in Wahrheit ganz anders und in der Praxis meist deutlich schwieriger.

Ein **Hamiltonweg** in einem Graphen ist ein Weg, der jeden Knoten in einem Graphen genau einmal besucht. Ein **Hamiltonkreis** ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal besucht.

Ein bekanntes Beispiel ist die Frage, ob es möglich ist, auf einem Schachbrett derart mit einem Springer zu ziehen, dass dieser jedes Feld genau einmal besucht und wahlweise (dann haben wir einen *Hamiltonkreis*) im letzten Zug wieder zum Startfeld zieht.

Fragen nach Hamiltonwegen oder verwandte Probleme tauchen in der Praxis auf natürliche Weise auf, wenn es etwa darum geht, möglichst effektive Routen in einem Netzwerk zu finden (vgl. das berühmte Problem des Handlungsreisenden). Leider gibt es im Gegensatz zum Eulerkreisproblem im Allgemeinen weder eine schöne Charakterisierung noch einen besonderen effizienten Algorithmus, um herauszufinden, ob ein gegebener Graph einen Hamiltonweg oder -kreis besitzt<sup>1</sup>.

Dennoch lassen sich einige nützliche Kriterien herleiten, die zumindest hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Hamiltonkreises liefern. Das einfachste dieser Art wurde 1952 von Gabriel Dirac gefunden:

**Satz von Dirac:** Hat in einem Graphen auf  $n \geq 3$  Knoten jeder Knoten Grad mindestens  $\frac{n}{2}$ , so gibt es einen Hamiltonkreis.

Im Gegensatz zum Eulerkreisproblem ist es zumindest klar, dass es durch Hinzufügen neuer Kanten nur einfacher wird, einen Hamiltonkreis zu finden, insofern ist es plausibel, dass ein Kriterium darauf beruht, dass es relativ viele Kanten geben muss.

**Beweis:** Nach der Gradformel gibt es insgesamt mindestens  $\frac{n^2}{4}$  Kanten, was (wegen  $n \geq 3$ ) mehr als  $n-1$  ist, mithin gibt es einen Kreis. Wir betrachten einen Kreis maximaler Länge. Angenommen, dies ist kein Hamiltonkreis, dann gibt es einen Knoten  $v$ , den er noch nicht enthält. Weil  $v$  Grad mindestens  $n/2$  hat und der Kreis Länge höchstens  $n-1$  besitzt, muss es zwei im Kreis aufeinanderfolgende Knoten geben, die beide mit  $v$  verbunden sind. Dann könnten wir den Kreis aber an dieser Stelle aufschneiden und  $v$  einfügen, was der Maximalität widerspricht!  $\square$

Ein paar Jahre nach Dirac hat der norwegische Mathematiker Øystein Ore eine etwas allgemeinere Aussage gefunden:

**Satz (Ore-Kriterium):** Ist in einem Graphen mit  $n \geq 3$  Knoten die Summe der Grade zweier nicht-benachbarter Knoten stets mindestens  $n$ , so gibt es einen Hamiltonkreis.

Die Voraussetzung ist natürlich insbesondere dann erfüllt, wenn wie bei Dirac alle Grade mindestens  $n/2$  sind.

Der Beweis ist (wie so oft in der Graphentheorie) eine Übung darin, die richtige extremale Betrachtung zu wählen, kombiniert mit einem typischen „Bastel-Argument“.

**Beweis:** Wir nehmen an, dass es für ein gegebenes  $n$  ein Gegenbeispiel gibt und betrachten ein solches mit maximal vielen Kanten. (Mit anderen Worten: Wir nehmen uns ein Gegenbeispiel, in dem es keinen Hamiltonkreis gibt, und fügen solange Kanten hinzu, wie das möglich ist, ohne einen Hamiltonkreis zu erzeugen. Die Bedingung der Gradsummen bleibt dabei natürlich erhalten.) Wir können also jetzt annehmen, dass es nach Hinzufügen einer beliebigen weiteren Kante einen Hamiltonkreis gibt. Insbesondere gibt es für je zwei Knoten, die nicht verbunden sind, einen Hamiltonweg mit diesen als Start- und Endknoten (nämlich das, was vom Hamiltonkreis nach dem erneuten Entfernen dieser Kante übrig bleibt).

---

<sup>1</sup>Man kann zeigen, dass das algorithmische Problem NP-schwer ist.

Wir betrachten nun einen solchen Hamiltonweg, der die Knoten in der Reihenfolge  $v_1, v_2, \dots, v_n$  durchläuft, wobei  $v_1$  und  $v_n$  nicht verbunden sind, mithin nach Annahme  $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$  gilt. Der Plan ist nun, diesen Weg an einer geeigneten Stelle aufzuschneiden und zu einem Kreis wieder zusammenzukleben. Finden wir nämlich ein  $k$ , für das  $v_1$  mit  $v_{k+1}$  und  $v_n$  mit  $v_k$  verbunden ist, so können wir den Hamiltonkreis

$$v_1, v_2, \dots, v_k, v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{k+1}, v_1$$

bauen. Von den  $n - 1$  möglichen Werten von  $k$  haben aber  $\deg(v_1)$  die Eigenschaft, dass  $v_1$  mit  $v_{k+1}$  verbunden ist, und  $\deg(v_n)$  haben die Eigenschaft, dass  $v_k$  mit  $v_n$  verbunden ist. Wegen  $\deg(v_1) + \deg(v_n) > n - 1$  muss es mithin einen Wert von  $k$  geben, für den beides erfüllt ist. Damit finden wir aber den gesuchten Hamiltonkreis (und also einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass es keinen solchen gibt).  $\square$

Als kleine Anwendung wollen wir eine Aufgabe aus der Indischen Mathe-Olympiade 2021 lösen:

**Aufgabe:** Die Mathemagierin und das Krümelmonster spielen das folgende Spiel. Die Mathemagierin legt Karten mit den Zahlen 1 bis 52 verdeckt auf den Tisch. In jedem Zug darf das Krümelmonster auf zwei der Karten zeigen und erfährt, ob diese aufeinanderfolgende Zahlen zeigen. Die Mathemagierin antwortet ehrlich. Nach endlich vielen Zügen zeigt das Krümelmonster auf zwei Karten. Es gewinnt, falls die Zahlen auf diesen beiden Karten aufeinanderfolgend sind, sonst verliert es.

Zeige, dass das Krümelmonster genau dann sicher gewinnen kann, wenn es mindestens 50 Fragen stellen darf.

**Lösung:** Es ist leicht, eine Gewinnstrategie mit 50 Fragen anzugeben: Das Krümelmonster kann eine Karte auswählen und sie mit 50 anderen vergleichen. Sagt die Mathemagierin einmal Ja, ist das Spiel sofort vorbei. Andernfalls weiß das Krümelmonster am Ende, dass die erste und die letzte übrige Karte benachbart sind.

Die interessantere Frage ist, warum es nicht mit 49 Fragen geht. Eine Strategie des Krümelmonsters würde daraus bestehen, dass es 49 Paare auswählt. Da wir davon ausgehen können, dass die Antwort der Mathemagierin immer Nein ist (das ist der einzige interessante Fall), müsste es anschließend ein Paar geben, von dem das Krümelmonster sicher weiß, dass die beiden Zahlen benachbart sind.

Mit anderen Worten wäre eine Strategie eine Auswahl von 50 Paaren, von denen immer eines sicher benachbart ist. Wir können dies in einen Graphen übersetzen, dessen Knoten die 52 Karten sind und dessen Kanten die 50 ausgewählten Paare sind. Wir müssen zeigen, dass es möglich ist, eine Verteilung der Zahlen auf die Karten anzugeben, sodass keine der Kanten benachbarte Zahlen verbindet. Mit anderen Worten müssen wir einen Hamiltonweg im *Komplement* des Graphen finden, also in dem Graphen, der genau die Kanten enthält, die der ursprüngliche Graph nicht enthält.

Unsere Aufgabe ist mithin äquivalent dazu zu zeigen, dass ein Graph auf 52 Knoten, in dem höchstens 50 Kanten fehlen, immer einen Hamiltonweg enthält. Dazu genügt es offensichtlich zu zeigen, dass es sogar immer einen Hamiltonkreis gibt, wenn höchstens 49 Kanten fehlen. Hier können wir die Ore-Verbindung überprüfen: Sind  $u$  und  $v$  nicht benachbart, so ist dies bereits eine fehlende Kante. Unter den möglichen weiteren 100 von  $u$  und  $v$  ausgehenden Kanten fehlen höchstens 48, mithin ist  $\deg(u) + \deg(v) \geq 52$  und die Ore-Bedingung erfüllt!  $\square$

Auch das Ore-Kriterium ist weit davon entfernt, eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises zu liefern. Es lohnt sich daher, sich nicht nur mit den Resultaten sondern auch mit den Beweistechniken vertraut zu machen, um sie in einer leicht veränderten Situation anpassen zu können, wo das Resultat selbst nicht anwendbar ist.

## 2.3 Von Binärwörtern und gerichteten Graphen

Zum Abschluss wollen wir eine Aufgabe diskutieren, die uns zeigt, dass sich (schwierige) Probleme über Hamiltonkreise in speziellen Situationen durch (einfachere) Probleme über Eulerkreise ersetzen lassen.

**Aufgabe:** Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Zeige, dass es möglich ist,  $2^n$  Ziffern 0 oder 1 so in einem Kreis aufzuschreiben, dass jedes der  $2^n$  Binärwörter der Länge  $n$  genau einmal unter  $n$  aufeinanderfolgenden Ziffern vorkommt.

Eine mögliche Lösung für  $n = 4$  ist etwa die Folge 0000100110101111, in der (zyklisch verlängert) alle 16 Binärwörter der Länge 4 genau einmal vorkommen. (Es lohnt sich einmal selbst zu versuchen, von Hand eine Lösung für  $n = 5$  zu finden, um sich von der Schwierigkeit des Problems zu überzeugen!) Solche Folgen heißen auch *de-Bruijn-Folgen*, nach dem niederländischen Mathematiker N. G. de Bruijn, der sie 1946 untersuchte (auch wenn er 30 Jahre später feststellte, dass das Problem schon 1894 gelöst wurde).

**Lösung:** Zunächst bietet es sich auf natürliche Weise an, das Problem als die Frage nach einem Hamiltonkreis im folgenden Graphen zu interpretieren: Als Knoten wählen wir die  $2^n$  möglichen Binärwörter und eine Kante zwischen zwei Binärwörtern zeichnen wir ein, wenn die letzten  $n - 1$  Stellen des einen Worts mit den ersten  $n - 1$  Stellen des anderen Worts übereinstimmen. (Dieser Graph kann Schleifen enthalten, z.B. ist  $00 \dots 0$  mit sich selbst verbunden.)

Um wirklich eine präzise Übersetzung unseres Problems zu erhalten, benötigen wir allerdings einen **gerichteten Graphen**, d.h. jede Kante bekommt eine Orientierung (die wir uns z.B. als Pfeil vorstellen können), mit der wir uns merken, welches das „erste“ und welches das „zweite“ Wort an der Kante ist.

Die Lösung der Aufgabe ist nun äquivalent (warum?) zur Existenz eines (gerichteten) Hamiltonkreises in diesem Graphen, also einem Kreis, der alle Knoten genau einmal durchläuft und bei dem alle Kanten in die gleiche Richtung zeigen.

Nun haben wir aber bereits gesehen, dass es im Allgemeinen sehr schwer ist, Hamiltonkreise zu untersuchen. Alle unsere Bedingungen setzten voraus, dass es „genug“ Kanten gibt, was hier sicherlich nicht der Fall ist: In unserem Graphen ist jeder Knoten Ausgangs- und Endpunkt von jeweils zwei Kanten.

Wie bereits angedeutet ist der Trick, das Problem stattdessen als eines über (gerichtete) *Eulerkreise* zu interpretieren. Dazu sollten wir stattdessen einen Graphen betrachten, in dem die  $2^n$  Binärwörter den *Kanten* entsprechen. Dies können wir tun, indem wir als Knoten die Binärwörter der Länge  $n - 1$  betrachten und wie zuvor eine gerichtete Kante zwischen zwei Wörtern einzeichnen, wenn das erste Wort auf die gleichen  $n - 2$  Stellen endet, mit denen das nächste beginnt. Da durch das „Übereinanderkleben“ der beiden Wörter ein Wort der Länge  $n$  entsteht und diese Zuordnung eindeutig ist, hat unser Graph tatsächlich  $2^n$  Kanten, die wir mit den  $n$ -stelligen Binärwörtern identifizieren können.

Ist etwa  $n = 4$ , so gibt es eine Kante von 110 zu 101, die dem Wort 1101 entspricht.

Natürlich ist der so konstruierte Graph von der gleichen Art wie zuvor, nur für  $n - 1$  anstelle von  $n!$  Entscheidend ist aber, dass wir eine Lösung des Problems nun in die Existenz eines (gerichteten) Eulerkreises in diesem Graphen übersetzen können, also eines geschlossenen Kantenzugs, der alle Kanten genau einmal durchläuft und bei dem alle Kanten in die gleiche Richtung zeigen. Denn die Knotenfolge in diesem Eulerkreis entspricht exakt der Abfolge der Binärwörter der Länge  $n - 1$  in unserer Lösung, während die Kantenfolge der Abfolge der Binärwörter der Länge  $n$  entspricht, die alle genau einmal vorkommen sollen. Man kann sich nun aber leicht die folgende Variante unseres Eulerkreis-Kriteriums für gerichtete Graphen überlegen: Ein gerichteter Graph enthält genau dann einen Eulerkreis, wenn er zusammenhängend ist und an jedem Knoten genauso viele Knoten beginnen wie enden. Beides ist aber in unserem Fall offensichtlich erfüllt (an jedem Knoten beginnen und enden je zwei Knoten und man kommt von jedem Binärwort zu jedem anderen). Fertig!  $\square$

Die Konstruktion lässt sich etwas verallgemeinern: Zu jedem Graphen kann man den **Kantengraphen** betrachten, dessen Knotenmenge die Kantenmenge des ursprünglichen Graphen ist und in dem zwei Knoten genau dann verbunden sind, wenn die zugehörigen Kanten im ursprünglichen Graphen einen gemeinsamen Knoten haben. Der Trick in der Lösung eben ist dann eine gerichtete Version der Beobachtung, dass sich aus einem Eulerkreis im ursprünglichen Graphen ein Hamiltonkreis im Kantengraphen ergibt (umgekehrt geht es allerdings im ungerichteten Fall nicht, warum?).

Das Spezielle in der Aufgabe oben war, dass der Graph und der zugehörige Kantengraph eine sehr ähnliche Struktur hatten, was im Allgemeinen natürlich nicht der Fall sein muss.

## 2.4 Aufgaben

**Aufgabe 2.1:** In einem Graphen auf  $n$  Knoten sei die Summe der Grade je zweier nicht-benachbarter Knoten stets mindestens  $n - 1$ . Zeige: Es gibt einen Hamiltonweg.

**Aufgabe 2.2:** Ein zusammenhängender Graph habe  $n$  Knoten und  $k$  Kanten. Zeige, dass es einen geschlossenen Kantenzug der Länge höchstens  $n + k - 1$  gibt, der alle Kanten mindestens einmal durchläuft.

**Aufgabe 2.3:** In einem Badminton-Turnier (bei dem es keine Unentschieden gibt) mit ungerade vielen Spielerinnen spielt jede Spielerin zweimal gegen jede andere. Es stellt sich heraus, dass jede Spielerin exakt die Hälfte ihrer Spiele gewonnen hat. Zeige, dass es möglich ist, die Hälfte aller Spiele für ungültig zu erklären, sodass danach immer noch jede Spielerin exakt die Hälfte ihrer gültigen Spiele gewonnen hat.

**Aufgabe 2.4:** Gegeben seien  $4n$  Kekse mit den Gewichten  $1, 2, 3, \dots, 4n$ . Jeder Keks ist von einer von  $n$  Sorten, wobei jede Sorte genau viermal vorkommt. Zeige, dass das Krümelmonster und die Mathematikerin die Kekse so unter sich aufteilen können, dass beide je zwei Kekse jeder Sorte und außerdem das gleiche Gesamtgewicht an Keksen bekommen.

**Aufgabe 2.5:** Die Kanten des vollständigen Graphen auf  $n$  Knoten werden mit  $k$  Farben eingefärbt. Es stellt sich heraus, dass für jede dieser Farben der Graph nach Entfernen der Kanten dieser einen Farbe keinen Hamiltonkreis mehr enthält. Wie groß kann  $k$  (in Abhängigkeit von  $n$ ) maximal sein?

## 3 Bipartite Graphen und der Waffelverteilungssatz

### 3.1 Von Waffeln und Keksdosen

Graphen eignen sich gut, um Fragen über Netzwerke, Bekanntschaften usw. mathematisch zu beschreiben. In den folgenden Beispielen hat der Graph aber eine bestimmte Zusatzstruktur:

An einem Matheseminar nehmen einige Schülerinnen teil. Zum Frühstück wird ein großer Teller mit verschiedenen Sorten Waffeln auf den Tisch gestellt. Jede Schülerin mag einige der Waffeln, andere nicht (ggf. auch keine oder alle). Unter welchen Bedingungen ist es möglich, die Waffeln so zu verteilen, dass jede Schülerin eine Waffel bekommt, die sie mag?

Das Krümelmonster hat 4 Dosen mit je 4 Keksen: eine blaue Dose mit 4 Butterkekse, eine schwarze Dose mit 4 Schokokekse, eine dunkelgrüne mit 4 Doppelkekse und eine violette mit 4 Vanillekipferln. Jetzt schüttet es alle Dosen aus, mischt die 16 Kekse und verteilt sie wieder gleichmäßig auf die 4 Dosen, d. h. in jede Dose 4 Kekse. Zeige, dass die Mathematikerin so aus jeder Dose genau einen Keks herausnehmen kann, dass unter diesen 4 Keksen alle 4 Sorten genau einmal vorkommen.

Wollen wir diese Situation mit einem Graphen modellieren, können wir uns die Schülerinnen und Waffeln (bzw. die Dosen und Kekssorten) als Knoten vorstellen und eine Kante einzeichnen, falls eine bestimmte Schülerin eine bestimmte Waffel mag (bzw. eine Dose eine Kekssorte enthält). Dabei ist allerdings zu bedenken, dass es hier jeweils zwei verschiedene Arten von Knoten gibt (Schülerinnen und Waffeln bzw. Dosen und Sorten) und wir nur Kanten zwischen der einen und der anderen Menge einzeichnen. Um diese Situation allgemein zu beschreiben, führen wir eine neue Sprache ein:

**Definition:** Ein Graph heißt **bipartit**, wenn sich seine Knotenmenge  $V$  so in zwei disjunkte Mengen  $V_1$  und  $V_2$  aufteilen lässt, dass alle Kanten zwischen einem Knoten aus  $V_1$  und einem aus  $V_2$  verlaufen. Eine (**perfekte**) **Paarung** von  $V_1$  nach  $V_2$  ist eine Auswahl, die jedem Knoten aus  $V_1$  einen mit ihm verbundenen Knoten aus  $V_2$  zuordnet, sodass kein Knoten aus  $V_2$  mehrfach vorkommt.

Grundsätzlich kann ein Graph „zufällig“ und ggf. auch auf verschiedene Weisen bipartit sein, z.B. können wir im leeren Graph (ohne Kanten) die Knoten auf beliebige Weise aufteilen. In der Praxis interessieren wir uns meistens für Paarungen in bipartiten Graphen, die (wie in den Beispielen oben) auf natürliche Weise eine bipartite Struktur haben.

Dennoch ist die folgende Charakterisierung manchmal nützlich:

**Satz:** Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine ungeraden Kreise enthält.

**Beweis:** Angenommen, ein bipartiter Graph würde einen ungeraden Kreis enthalten. Dann müssten dessen Knoten abwechselnd in  $V_1$  und  $V_2$  enthalten sein, was aber bei ungerader Länge nicht aufgeht, wenn man einmal um den Kreis herum geht.

Umgekehrt nehmen wir an, dass ein Graph keine ungeraden Kreise enthält und zeigen, dass er bipartit ist. Dazu genügt es, dies für jede Zusammenhangskomponente zu zeigen. Wir beginnen mit einem beliebigen Knoten  $v_0$ , den wir  $V_1$  zuordnen. Wegen des Zusammenhangs ist nun jeder Knoten  $v$  über einen Weg mit  $v_0$  verbunden. Die Länge eines kürzesten solchen Wegs wollen wir den Abstand zu  $v_0$  nennen. Dann ordnen wir  $v$  der Menge  $V_1$  zu, wenn der Abstand gerade ist, und sonst zu  $V_2$ . Wir müssen nun zeigen, dass jede Kante zwei Knoten aus  $V_1$  und  $V_2$  verbindet. Angenommen, es gäbe zwei verbundene Knoten aus dem gleichen  $V_i$ . Diese Kante bildet dann zusammen mit den kürzesten Wegen zu  $v_0$  einen geschlossenen Weg ungerader Länge. Dieser muss noch kein Kreis sein, lässt sich aber in Kreise zerlegen, die nicht alle gerade Länge haben können, Widerspruch!  $\square$

Wir wollen uns nun mit der Frage oben beschäftigen, wann im Beispiel oben eine zufriedenstellende Verteilung der Waffeln (also eine perfekte Paarung) möglich ist. Sicherlich muss es mindestens so viele Waffeln geben wie Schülerinnen und jede Schülerin muss mindestens eine Waffel mögen. Das alleine reicht allerdings nicht unbedingt aus, z.B. könnte es passieren, dass mehrere Schülerinnen nur eine (und zwar die gleiche) Waffel mögen, sodass eine von ihnen leer ausgehen wird. Allgemeiner lässt sich leicht feststellen, dass eine Verteilung nicht möglich ist, wenn es für irgendein  $k$  eine Gruppe von  $k$  Schülerinnen gibt, die zusammen weniger als  $k$  Waffeln mögen. Überraschenderweise ist diese (offensichtlich notwendige) Bedingung auch hinreichend, um eine Waffelverteilung zu garantieren:

**Waffelverteilungssatz:** In einem bipartiten Graphen mit Knotenmengen  $V_1$  und  $V_2$  gibt es genau dann eine perfekte Paarung, wenn die **Waffelverteilungsbedingung** gilt: Für jedes  $k$  und je  $k$  Knoten aus  $V_1$  gibt es mindestens  $k$  Knoten aus  $V_2$ , die mit einem dieser  $k$  Knoten aus  $V_1$  verbunden sind.

Der Waffelverteilungssatz ist auch als **Satz von Hall** oder als **Heiratssatz** bekannt. Bevor wir ihn beweisen, wollen wir ihn benutzen, um die Aufgabe mit den Keksdosen von oben zu lösen:

**Lösung:** Nach dem Waffelverteilungssatz genügt es die Waffelverteilungsbedingung zu überprüfen. Wir müssen mithin für jede Menge von  $k$  Dosen zeigen, dass sie zusammen mindestens  $k$  verschiedene Sorten enthalten. Aber die  $k$  Dosen enthalten mindestens  $4k$  Kekse. Da es von jeder Sorte nur 4 Kekse gibt, müssen unter diesen  $4k$  Keksen mindestens  $k$  verschiedene Sorten sein, fertig!  $\square$

Hier ist anzumerken, dass sich diese konkrete Aufgabe (die in der Bundesrunde 2010 in Klasse 8 gestellt wurde) auch ohne allzu großen Aufwand mit einer (mehr oder weniger geschickten) Fallunterscheidung lösen lässt. Dies ist allerdings nicht mehr realistisch möglich, wenn man 4 durch eine (deutlich) größere Zahl wie 20 ersetzt und natürlich erst recht nicht, wenn man die gleiche Aussage für alle möglichen solchen Zahlen zeigen möchte. Die oben angegebene Lösung ist nicht nur kürzer sondern funktioniert auch sofort für jeden beliebigen Wert von 4.

Im Waffelverteilungssatz wird nicht vorausgesetzt, dass  $V_1$  und  $V_2$  gleich groß sein müssen! Tatsächlich können wir  $k = |V_1|$  wählen und sehen sofort, dass  $|V_2| \geq |V_1|$  aus der Waffelverteilungsbedingung folgt. Es ist aber sehr wohl möglich, dass  $V_2$  größer als  $V_1$  ist. Insbesondere müssen bei einer Paarung zwar alle Knoten aus  $V_1$  verbunden werden, aber nicht unbedingt alle aus  $V_2$ .

Ist  $|V_1| = |V_2|$ , so ist die Situation symmetrischer. In diesem Fall dürfen wir uns aussuchen, ob wir von Teilmengen von  $V_1$  oder von  $V_2$  ausgehen. Zum Beispiel hätten wir im Argument oben auch zeigen können, dass es zu je  $k$  Sorten von Keksen mindestens  $k$  Dosen gibt, die eine dieser Sorten enthalten. Bei dieser Aufgabe macht das keinen großen Unterschied, in weniger symmetrischen Situationen kann es aber ein nützlicher Trick sein.

**Beweis des Waffelverteilungssatzes:** Wie wir bereits festgestellt haben, ist die Waffelverteilungsbedingung notwendig für die Existenz einer perfekten Paarung. Für die andere Richtung verwenden wir starke Induktion über  $|V_1|$ , wobei der Fall  $n = 1$  trivial ist. Wir können nun annehmen, dass die Aussage für alle kleineren Knotenmengen schon bekannt ist. Wir beginnen mit einer Strategie, die nicht immer funktionieren, aber trotzdem zu einem Beweis führen wird: Wir wählen einen beliebigen Knoten  $v_1$  aus  $V_1$  und verbinden ihn mit einem beliebigen Knoten  $v_2$  aus  $V_2$ , mit dem er verbunden ist (nach der Bedingung für  $k = 1$  gibt es ein solches  $v_2$ ). Entfernen wir nun  $v_1$  und  $v_2$  aus dem Graphen, so können wir für die übrigen Knoten nach Induktion eine Paarung finden, falls diese weiterhin die Waffelverteilungsbedingung erfüllen. Ist dies nicht der Fall, so muss es ein  $k \geq 1$  und eine Menge  $W_1$  von  $k$  Knoten aus  $V_1$  geben, die nach dem Entfernen von  $v_2$  mit weniger als  $k$  Knoten in  $V_2$  verbunden sind. Da die Bedingung vor dem Entfernen erfüllt war, müssen die Knoten aus  $W_1$  damit in ganz  $V_2$  mit einer Menge  $W_2$  von genau  $k$  Knoten verbunden sein (von denen einer  $v_2$  ist).

In diesem Fall wird unsere naive Strategie,  $v_1$  mit  $v_2$  zu verbinden, nicht funktionieren, aber wir haben etwas über unseren Graphen gelernt, nämlich die Existenz von  $W_1$  und  $W_2$ . Nun ist klar, dass wir die Knoten aus  $W_1$  mit denen aus  $W_2$  verbinden müssen und nach Induktion ist dies auch tatsächlich möglich, denn für je  $k$  Knoten aus  $W_1$  muss es  $k$  Knoten in  $V_2$  geben, die mit diesen verbunden sind und nach Annahme liegen diese  $k$  Knoten sogar alle in  $W_2$ , d.h. der Graph der Kanten zwischen  $W_1$  und  $W_2$  erfüllt die Waffelverteilungsbedingung.

Damit bleibt zu untersuchen, ob wir die Knoten aus  $V_1 \setminus W_1$  (also denen, die in  $V_1$ , aber nicht in  $W_1$  liegen) mit Knoten aus  $V_2 \setminus W_2$  verbinden können. Nach Induktion genügt es dafür aber wiederum, für  $V_1 \setminus W_1$  und  $V_2 \setminus W_2$  die Waffelverteilungsbedingung zu überprüfen: Wir betrachten also für ein beliebiges  $\ell$  eine Menge  $M$  von  $\ell$  Knoten in  $V_1 \setminus W_1$  und wollen zeigen, dass die Knoten aus  $M$  mit mindestens  $\ell$  Knoten in  $V_2 \setminus W_2$  verbunden sind. Der Trick ist nun, die Menge der  $k + \ell$  Knoten aus  $M$  und  $W_1$  zusammen zu betrachten. Nach der Waffelverteilungsbedingung im ursprünglichen Graphen sind diese mit mindestens  $k + \ell$  Knoten in  $V_2$  verbunden. Da  $W_2$  nur  $k$  Knoten enthält, muss es noch mindestens  $\ell$  Knoten in  $V_2 \setminus W_2$  geben, die mit  $M$  oder  $W_1$  verbunden sind. Da  $W_1$  aber nur mit  $W_2$  verbunden ist, müssen alle mit  $M$  verbunden sein, d.h.  $M$  ist wie gewünscht mit mindestens  $\ell$  Knoten in  $V_2 \setminus W_2$  verbunden.

Damit erfüllen die Restmengen  $V_1 \setminus W_1$  und  $V_2 \setminus W_2$  immer noch die Waffelverteilungsbedingung und nach Induktion ist eine Verteilung möglich, die dann kombiniert mit der Paarung zwischen  $W_1$  und  $W_2$  eine Paarung im gesamten Graphen liefert.  $\square$

Auch wenn der Beweis nicht schwer ist, ist der Waffelverteilungssatz ein Satz, den man sehr gut verwenden kann, ohne den Beweis zu kennen!

Die Äquivalenz ist heuristisch besonders nützlich: Weiß man aus der Aufgabe, dass es eine Paarung geben soll, *muss* die Bedingung stimmen und sie zu überprüfen führt normalerweise auf eine einfachere Aufgabe. Als weniger naheliegendes Beispiel (bei dem zunächst nicht klar ist, dass ein solcher Ansatz funktioniert) lösen wir die Feldweg-Aufgabe noch ein drittes Mal:

**3. Lösung der Feldweg-Aufgabe:** Wir haben am Anfang gesehen, dass ein gieriger Algorithmus zu Situationen führen kann, in denen wir nichts mehr machen können. Stattdessen können wir mit einem vorsichtigen gierigen Algorithmus beginnen, der uns noch etwas „Luft“ lässt: Wir wählen solange wie möglich Wege aus, die wir zu Radwegen umbauen, wobei wir zunächst sicherstellen wollen, dass kein Ort mehr als einen Radweg bekommt. Nach Ende dieses Prozesses gibt es mithin zwei Kategorien von Orten: solche, die noch keinen Radweg haben, und solche, die genau einen Radweg haben. Nennen wir diese Mengen  $V_1$  bzw.  $V_2$ , so genügt es offenbar, eine Paarung zwischen  $V_1$  und  $V_2$  zu finden und die ausgewählten Wege zu Radwegen auszubauen, denn danach haben alle Orte aus  $V_1$  genau einen Radweg und alle aus  $V_2$  einen oder zwei. Hier ist zu beachten, dass der Graph natürlich nicht bipartit sein muss: Es kann sehr wohl Kanten zwischen Orten in  $V_2$  geben, allerdings keine zwischen zwei Orten in  $V_1$ , denn sonst hätten wir diese in unserem Algorithmus noch verbunden. In jedem Fall können wir uns aber auf die Betrachtung der Kanten zwischen  $V_1$  und  $V_2$  einschränken, wenn wir dies wollen. Es genügt somit die Waffelverteilungsbedingung zu überprüfen: Für je  $k$  Orte aus  $V_1$  müssen wir  $k$  Orte aus  $V_2$  finden, die mit einem der  $k$  Orte verbunden sind. Da es keine Wege zwischen Orten aus  $V_1$  gibt, führen von jedem Ort in  $V_1$  drei Wege nach  $V_2$ . Von den  $k$  ausgewählten Orten gehen also  $3k$  Wege nach  $V_2$ . Da aber an jedem Ort in  $V_2$  höchstens drei Wege aus  $V_1$  ankommen, müssen diese  $3k$  Wege mindestens  $k$  verschiedene Orte in  $V_2$  treffen, die Waffelverteilungsbedingung ist erfüllt!  $\square$

### 3.2 Von Königen und Antiketten

Selbst in bipartiten Graphen ohne perfekte Paarung gilt eine interessante Aussage, die sich bei genauerem Hinsehen als äquivalent zum Waffelverteilungssatz herausstellt:

**Satz von König:** In einem bipartiten Graphen stimmen die folgenden Zahlen überein:

- (i) die Größe einer **maximalen Paarung**, also die maximale Anzahl von Kanten, die keine gemeinsamen Knoten haben
- (ii) die Größe einer **minimalen Knotenüberdeckung**, also die minimale Anzahl an Knoten, die derart ausgewählt werden können, dass jede Kante von mindestens einem dieser Knoten ausgeht

**Beweis:** Es ist klar, dass jede Knotenüberdeckung mindestens so viele Knoten enthält wie eine Paarung, denn aus jeder Kante einer Paarung muss ein Knoten ausgewählt werden. Der interessante Teil ist, dass es zur minimalen Knotenüberdeckung mit  $m$  Knoten auch eine Paarung mit  $m$  Kanten gibt. Dazu seien  $W_1 \subset V_1$  und  $W_2 \subset V_2$  die  $|W_1| + |W_2| = m$  Knoten der minimalen Knotenüberdeckung. Wir wollen eine Paarung mit  $m$  Kanten konstruieren. Dazu genügt es, eine perfekte Paarung von  $W_1$  in  $V_2 \setminus W_2$  zu finden, analog gibt es dann auch eine perfekte Paarung von  $W_2 \in V_1 \setminus W_1$  und zusammen ergeben die beiden die gesuchte Paarung mit  $m$  Kanten.

Es genügt somit die Waffelverteilungsbedingung für  $W_1$  und  $V_2 \setminus W_2$  zu überprüfen. Dazu betrachten wir eine Menge von  $k$  Knoten in  $W_1$ . Wären diese mit weniger als  $k$  Knoten in  $V_2 \setminus W_2$  verbunden, könnten wir sie durch die mit ihnen verbundenen Knoten ersetzen und erhielten eine kleinere Knotenüberdeckung, Widerspruch zur Minimalität! Somit ist die Waffelverteilungsbedingung erfüllt und die gesuchte Paarung existiert!  $\square$

Als überraschende Anwendung wollen wir noch den **Satz von Dilworth** besprechen. Dazu müssen wir zunächst definieren, was eine *Halbordnung* ist.

**Definition:** Eine **Halbordnung** auf einer Menge  $M$  ist eine Menge von Relationen  $x \leq y$  für einige Paare  $(x, y)$  mit  $x, y \in M$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Es gilt  $x \leq x$  für alle  $x \in M$
- (ii) Ist  $x \leq y$  und  $y \leq x$ , dann gilt  $x = y$ .
- (iii) Ist  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , dann gilt  $x \leq z$ .

Eine **Kette** ist eine geordnete Folge  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ . Eine **Antikette** ist eine Teilmenge, in der keine zwei Elemente vergleichbar sind.

Ein naheliegendes Beispiel ist die übliche Ordnung einer Zahlenmenge nach ihrer Größe. In den folgenden Beispielen sieht man aber besser, dass es Paare geben darf, die auf keine Weise miteinander vergleichbar sind, d.h. für die weder  $x \leq y$  noch  $y \leq x$  gilt:

- Ist  $M$  eine Menge natürlicher Zahlen, so können wir definieren, dass  $x \leq y$  genau dann gilt, wenn  $x$  ein Teiler von  $y$  ist. Hier sind 3 und 5 nicht vergleichbar.
- Ist  $M = \mathbb{R}^2$ , so können wir definieren, dass  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$  genau dann gilt, falls  $x_1 \leq x_2$  und  $y_1 \leq y_2$  gilt. Hier sind  $(1, 3)$  und  $(2, 1)$  nicht vergleichbar.
- Ist  $M$  eine Menge von Mengen, so können wir definieren, dass  $x \leq y$  gilt, falls  $x$  in  $y$  enthalten ist. Hier sind  $\{1, 2, 4\}$  und  $\{2, 5\}$  nicht vergleichbar.

**Satz von Dilworth:** In einer endlichen halbgeordneten Menge stimmt die *maximale Größe einer Antikette* überein mit der *minimalen Anzahl an Ketten, mit denen die gesamte Menge überdeckt werden kann*.

**Beweis:** Es ist klar, dass zur Überdeckung mindestens so viele Ketten benötigt werden wie die Größe einer Antikette, denn je zwei Elemente der Antikette können nicht in der gleichen Kette sein. Interessant ist also wieder nur die Umkehrung, eine Überdeckung mit der gleichen Anzahl an Ketten wie die Größe einer Antikette zu konstruieren.

Hierfür betrachten wir den bipartiten Graphen, in dem  $V_1$  und  $V_2$  jeweils Kopien der halbgeordneten Menge  $M$  mit  $n$  Elementen sind und eine Kante  $(v_1, v_2)$  genau dann eingezeichnet wird, wenn  $v_1 < v_2$  gilt. Nach dem Satz von König gibt es eine Knotenüberdeckung und eine Paarung mit der gleichen Anzahl  $k$  an Elementen.

Diejenigen Elemente aus  $M$ , die auf keiner der beiden Seiten für die Knotenüberdeckung verwendet werden, bilden eine Antikette mit mindestens  $n - k$  Elementen (sonst gäbe es eine Kante zwischen ihnen, was der Eigenschaft der Knotenüberdeckung widerspricht).

Andererseits können wir die Elemente entlang der  $k$  zur Paarung gehörenden Kanten zu Ketten verbinden, sodass wir eine Überdeckung der Menge mit  $n - k$  Ketten erhalten.  $\square$

Als kleine trickreiche Anwendung zeigen wir zum Abschluss den folgenden berühmten Satz:

**Satz von Erdős-Szekeres:** In einer Folge von  $mn + 1$  reellen Zahlen gibt es eine monoton steigende Folge der Länge mindestens  $m + 1$  oder eine monoton fallende Folge der Länge mindestens  $n + 1$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Halbordnung auf unserer Menge, die für zwei Folgenglieder  $x \leq y$  festlegt, falls  $x$  nicht größer als  $y$  ist und nicht nach  $y$  in der Folge vorkommt. Eine Kette ist dann eine monoton steigende Teilfolge, eine Antikette eine monoton fallende Teilfolge. Hätte die längste Antikette Länge höchstens  $n$ , so müsste es nach Dilworth  $n$  monoton steigende Folgen geben, die die gesamte Menge überdecken. Nach dem Schubfachprinzip müsste dann aber eine von ihnen Länge mindestens  $m + 1$  haben.  $\square$

### 3.3 Aufgaben

**Aufgabe 3.1:** In einer Karawane gibt es 100 Beduinen und 99 Kamele. Jeder der Beduinen kann auf einigen Kamelen reiten, auf anderen nicht.

Es ist bekannt, dass es für jedes  $k$  und jede Gruppe von  $k$  Beduinen mindestens  $k - 1$  Kamele gibt, auf denen einer der Beduinen aus dieser Gruppe reiten kann. Zeige, dass es möglich ist, 99 der Beduinen mit je einem Kamel auszustatten, auf dem sie reiten können.

**Aufgabe 3.2:** Auf der Teeparty des Märzhasen bekommt die Mathematikerin vom verrückten Hutmacher einen Hut aufgesetzt, auf dem genau 1012 der Zahlen  $1, 2, \dots, 2025$  stehen. Sie selbst kann diese Zahlen nicht sehen. Das Krümelmonster muss nun genau eine derjenigen Zahlen  $1, 2, \dots, 2025$  auswählen, die noch nicht auf dem Hut stehen, und diese auf den Hut schreiben. Dies geschieht so, dass hinterher nicht zu erkennen ist, welche Zahl neu hinzugefügt wurde.

Nun wird der Hut dem Krümelmonster aufgesetzt. Nur wenn die Mathematikerin anhand der 1013 Zahlen auf dem Hut herausfinden kann, welche der Zahlen vom Krümelmonster hinzugefügt wurde, bekommen die beiden vom Märzhasen ihr wohlverdientes Stück Sahnetorte.

Bevor die Mathematikerin den Hut aufgesetzt bekommt, dürfen sich die beiden natürlich eine gemeinsame Strategie ausdenken, aber nach dem Aufsetzen des Huts dürfen sie keine Informationen mehr austauschen. Können sie sicherstellen, dass sie nicht hungern müssen?

**Aufgabe 3.3:** An der Bundesrunde nehmen je 12 Schülerinnen aus Bremen, Hamburg und Niedersachsen teil. Jede Teilnehmerin ist mit mindestens 9 Teilnehmerinnen aus jedem der beiden anderen Bundesländer befreundet (wobei Freundschaft auf Gegenseitigkeit beruht).

Zeige, dass es möglich ist, die 36 Teilnehmerinnen für die Stadtrallye so in 12 Dreier-Teams einzuteilen, dass in jedem Team alle drei Bundesländer vertreten sind und die drei Teammitglieder alle untereinander befreundet sind.

**Aufgabe 3.4:** Die Gitterpunkte  $(x, y)$  mit  $1 \leq x, y \leq 3n$  werden mit den Farben Anthrazit, Bernstein und Cyan eingefärbt, je nachdem ob  $x + y$  den Rest 0, 1 oder 2 modulo 3 hat. Es gibt also  $3n^2$  Punkte jeder Farbe. Auf jedem Punkt liegt ein anthrazit-, bernstein- oder cyanfarbener Stein, wobei jede Farbe genau  $3n^2$ -mal vorkommt.

Angenommen, es ist möglich, die Steine derart zu permutieren, dass jeder Stein maximal eine Länge von  $d$  bewegt wird und jeder anthrazitfarbene Stein einen bernsteinfarbenen ersetzt, jeder bernsteinfarbene einen cyanfarbenen und jeder cyanfarbene einen anthrazitfarbenen.

Zeige, dass es dann auch möglich ist, die Steine so zu permutieren, dass jeder Stein maximal eine Länge von  $d + 2$  bewegt wird und danach auf einem Punkt liegt, der die gleiche Farbe hat wie der Stein.

**Aufgabe 3.5:** Das Krümelmonster hat 100 Dosen mit Keksen verschiedener Sorten. Es ist bekannt, dass für jedes  $k$  in je  $k$  Dosen zusammen mindestens  $k + 1$  verschiedene Sorten enthalten sind. Zeige, dass es möglich ist, einige der Kekssorten als „lecker“ und die anderen als „gesund“ zu klassifizieren, sodass jede Dose sowohl leckere als auch gesunde Sorten enthält.

## 4 Planare Graphen und Färbungen

Typischerweise stellen wir uns einen Graphen als aufgezeichnetes Netzwerk von Wegen vor (den Kanten), die Orte miteinander verbinden. Dabei sollten sich am besten keine Kanten kreuzen.

**Definition:** Ein Graph heißt *planar*, wenn es möglich ist, ihn so in der Ebene zu zeichnen, dass sich keine zwei Kanten schneiden. (Die Kanten müssen keine geraden Strecken sein.)

Der vollständige Graph auf 4 Knoten entsteht, wenn man die vier Ecken eines Quadrats nimmt und paarweise miteinander verbindet. Dabei werden sich natürlich die Diagonalen kreuzen. Allerdings können wir eine der Diagonalen auch außen um das Quadrat herum einzeichnen, sodass sich keine zwei Kanten mehr kreuzen!

Der vollständige Graph  $K_4$  auf 4 Knoten ist mithin planar (was nicht besagt, dass es nicht auch möglich ist, ihn *mit* Überkreuzungen zu zeichnen). Hier ist es wichtig, den Graph als „kombinatorische Information“ (welche Ecken sind mit welchen anderen verbunden) von seinen konkreten geometrischen Realisierungen zu unterscheiden. Ein Graph ist planar, wenn es *möglich* ist, eine „gute“ geometrische Realisierung zu finden.

Wie bei fast jedem Konzept in der Mathematik stellen sich nun zwei natürliche Fragen:

- (i) Welche Graphen sind planar? Wie können wir herausfinden, ob ein Graph planar ist?
- (ii) Welche speziellen Eigenschaften besitzen planare Graphen noch? Mit anderen Worten: Warum ist es interessant, zu wissen, ob ein Graph planar ist? (außer um ihn zu zeichnen)

Für den  $K_4$  haben wir oben mit etwas Probieren herausgefunden, dass er planar ist. Allgemein kann man natürlich leicht überprüfen, dass ein planarer Graph tatsächlich planar ist, indem man ihn einfach geeignet aufzeichnet!

Dagegen ist es überhaupt nicht klar, wie man zeigen kann, dass ein gegebener Graph *nicht* planar ist. Als Beispiel kann man den vollständigen Graphen  $K_5$  auf 5 Knoten betrachten. Hier kommt man nach einer Weile Probieren zur Vermutung, dass dieser nicht planar ist. Aber es ist sehr unklar, wie man so etwas beweisen kann. Schließlich ist es kaum möglich, alle Möglichkeiten durchzuprobieren, wie man einen Graphen aufmalen könnte.

Es liegt also nahe, damit zu beginnen, Frage (i) zu untersuchen. Tatsächlich ist es aber besser, mit Frage (ii) zu beginnen, da uns dies Kriterien liefern wird, um Frage (i) zu beantworten.

### 4.1 Von Ecken, Kanten und Flächen

Eine erste Beobachtung ist, dass die Kanten eines planaren Graphen (wenn dieser auch tatsächlich ohne Überkreuzungen aufgezeichnet ist) die Ebene eindeutig in verschiedene *Flächen* zerlegen. Diese genaue Zerlegung hängt natürlich stark davon ab, wie wir den Graphen konkret aufzeichnen. Wir beobachten aber, dass die Anzahl der Flächen nicht von dieser Realisierung abhängt. Tatsächlich hängt sie in einem zusammenhängenden Graphen sogar nur von der Anzahl der Ecken und Kanten ab:

**Satz:** Ein zusammenhängender planarer Graph mit  $E$  Ecken und  $K$  Kanten zerlegt die Ebene in  $F = K - E + 2$  Flächen (wobei wir die unbegrenzte Außenfläche mitzählen). Es gilt also

$$E - K + F = 2.$$

**Beweis:** Wir verwenden Induktion über  $E + K$ . Am Induktionsanfang  $E + K = 1$  ist  $E = 1, K = 0$  und damit auch  $F = 1$ , die Aussage gilt.

Die Aussage sei nun für alle kleineren Werte von  $E + K$  bekannt. Gibt es einen Knoten mit Grad 1, so können wir diesen und die angrenzende Kante entfernen, ohne die Anzahl an Flächen zu ändern. Nach Induktionsannahme gilt also  $(E - 1) - (K - 1) + F = 2$  und damit auch  $E - K + F = 2$ . Andernfalls bleibt der Graph durch Entfernen einer beliebigen Kante zusammenhängend und die Anzahl der Flächen erhöht sich um 1 (da diese Kante zwei Flächen getrennt hat, die nun verbunden sind). Nach Induktionsannahme gilt  $E - (K - 1) + (F - 1) = 2$  und damit auch  $E - K + F = 2$ .  $\square$

Der soeben bewiesene Satz lässt sich zu einem deutlich bekannteren umformulieren:

**Eulerscher Polyedersatz:** In einem konvexen beschränkten Polyeder gilt  $E - K + F = 2$ , wobei  $E$  die Anzahl der Ecken,  $K$  die Anzahl der Kanten und  $F$  die Anzahl der Flächen ist.

**Beweis:** Wir suchen uns eine Fläche des Polyeders aus und ziehen den Polyeder am Rand dieser Fläche auseinander, bis er komplett flach ist. Dabei wird aus dem restlichen Skelett des Polyeders ein planarer Graph, der auf der ausgewählten Fläche liegt. Dabei gehen Ecken in Ecken und Kanten in Kanten über. Von den Flächen des Polyeders ist eine verschwunden (nämlich die zu Beginn ausgewählte), aber dafür zählen wir ja die unbeschränkte Außenfläche in unserer Formel oben mit.  $\square$

Beispielsweise ist für einen Würfel  $E = 8, K = 12, F = 6$  und für einen Tetraeder  $E = 4, K = 6, F = 4$ . Man kann sich den Satz so merken, dass die **Euler-Charakteristik**  $\chi = E - K + F$  bei jedem Polyeder die gleiche ist, und sie dann einfach für einen beliebigen Polyeder berechnen, wenn man sich beim exakten Wert nicht sicher ist.

Die Konvexität des Polyeders ist nur insofern wichtig, dass sie garantiert, dass unser Polyeder keine „Löcher“ hat. Man kann es sich so vorstellen, dass man die Oberfläche unseres Polyeders zu einem runden Ballon aufpusten kann. Betrachtet man dagegen Polyeder mit z.B. einem Loch (sodass man sie zu einer Art Donut<sup>a</sup> aufpusten kann), so gilt auf einmal  $E - K + F = 0$ , allerdings wieder für beliebige Wahlen des Polyeders!

Man sagt, dass der Ballon Euler-Charakteristik  $\chi = 2$  und der Donut  $\chi = 0$  hat.

Dies liefert übrigens eine „praktische“ Methode, um zu untersuchen, ob die Erde eine Kugel oder ein Donut ist: Wir laufen die gesamte Oberfläche ab und zerlegen sie in Vielecke (z.B. Dreiecke). Dann zählen wir Ecken, Kanten und Flächen in dieser Zerlegung und berechnen die Euler-Charakteristik  $E - K + F$ .

In der **Algebraischen Topologie** beschäftigt man sich damit, solche (topologischen) Invarianten wie die Euler-Charakteristik von verschiedenen geometrischen Objekten (wie einer Kugel oder einem Donut) zu untersuchen, die uns erlauben, sie präzise voneinander zu unterscheiden (wohingegen die naheliegendere Invariante „Anzahl der Löcher“ sich gar nicht so einfach formalisieren lässt<sup>b</sup>).

<sup>a</sup>oder einer Kaffeetasse!

<sup>b</sup>Wie viele Löcher hat z.B. ein T-Shirt?

Der Polyedersatz liefert eine Einschränkung dafür, dass es Polyeder mit einer bestimmten Anzahl Ecken, Kanten oder Flächen geben kann.

Genauso können wir nun etwas über planare Graphen lernen:

**Satz:** In einem zusammenhängenden planaren Graphen mit  $E \geq 3$  Ecken und  $K$  Kanten gilt stets  $K \leq 3E - 6$ . In jedem planaren Graphen gilt  $K < 3E$ .

**Beweis:** Jede Kante grenzt in einer planaren Realisierung an genau zwei Flächen, jede Fläche an mindestens drei Kanten (wegen  $E \geq 3$  gilt dies auch für die Außenfläche). Zählen wir Paare angrenzender Kanten und Flächen doppelt ab, erhalten wir  $2K \geq 3F$ . Einsetzen in die Euler-Formel liefert

$$E = 2 + K - F \geq 2 + K - \frac{2K}{3} = 2 + \frac{K}{3}$$

und nach Umstellen die erste Behauptung. Die zweite folgt leicht durch Betrachten der einzelnen Zusammenhangskomponenten (wobei die Fälle  $E = 1$  und  $E = 2$  extra behandelt werden müssen).  $\square$

Natürlich ließe sich analog auch eine Relation zwischen  $E$  und  $F$  aufstellen, aber die zwischen  $E$  und  $K$  ist besonders nützlich, weil sie eine Aussage über die kombinatorische Struktur des Graphen ist (zu der  $F$  erst einmal nicht gehört).

Zum Beispiel folgt sofort, dass der vollständige Graph  $K_n$  auf  $n$  Knoten für  $n \geq 5$  nicht planar ist, denn hier ist  $E = n$  und  $K = \frac{n(n-1)}{2} > 3n - 6$ .

Natürlich reicht es zu wissen, dass der  $K_5$  nicht planar ist, denn dann muss jeder Graph, der einen  $K_5$  enthält (also insbesondere ein  $K_n$  für  $n \geq 5$ ) ebenfalls nicht planar sein.

Ein anderes berühmtes Beispiel eines nicht-planaren Graphen ist das folgende:

**Aufgabe:** Gegeben sind drei Häuser und drei Versorgungsstationen für Wasser, Strom und Gas. Ist es möglich, jedes der Häuser mit jeder der Stationen so durch eine Leitung zu verbinden, dass sich keine zwei davon kreuzen?

Mit anderen Worten: Ist der vollständige bipartite Graph  $K_{3,3}$  planar?

**Lösung:** Hier ist  $E = 6$  und  $K = 9$ , das Kriterium von oben liefert also keinen Widerspruch. Dennoch ist das bekannte Rätsel nicht lösbar. Die entscheidende Beobachtung zum Beweis ist, dass der Graph bipartit ist und somit alle Flächen gerade viele Ecken haben, insbesondere also mindestens vier. Mithin gilt im Argument oben sogar  $2K \geq 4F$  und damit sogar  $K \leq 2E - 4$ , was hier nicht erfüllt ist.  $\square$

Auch hier gilt: Jeder Graph, der einen  $K_{3,3}$  enthält, ist automatisch nicht planar. Wir können dies noch etwas verallgemeinern: Eine *Unterteilung* eines Graphens entsteht, wenn man die folgende Operation einige Male durchführt: Wir wählen eine Kante aus und fügen auf ihr einen neuen Knoten hinzu (und ersetzen diese Kante somit durch zwei neue). Dann kann ein planarer Graph offensichtlich auch keine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$  enthalten.

Etwas überraschend ist dies tatsächlich eine vollständige Charakterisierung, wie der folgende Satz besagt, den wir hier nicht beweisen werden (der Beweis ist zwar nicht wirklich schwierig, aber ziemlich kompliziert und technisch):

**Satz von Kuratowski:** Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung des  $K_5$  noch eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  als Teilgraphen enthält.

Der Satz von Kuratowski liefert ein sehr handliches Kriterium, um die Planarität eines Graphen zu überprüfen (allerdings sollte man daran denken, dass es nicht genügt, nur Teilgraphen  $K_{3,3}$  oder  $K_5$  sondern auch ihre Unterteilungen zu überprüfen).

Ebenfalls ohne Beweis erwähnen wir noch den vielleicht berühmtesten Satz der Graphentheorie:

**Vierfarbensatz:** In jedem planaren Graphen ist es möglich, die Flächen derart in vier Farben zu färben, dass keine zwei benachbarten Flächen die gleiche Farbe haben.

Der Vierfarbensatz hat eine natürliche „Anwendung“: Wenn man die Länder einer Landkarte gut unterscheidbar einfärben möchte, reichen dafür stets vier Farben (solange es keine Enklaven gibt).

Zu jedem planaren Graphen kann man auch den **dualen Graphen** betrachten, in dem jeder Knoten einer Fläche im ursprünglichen Graphen entspricht und zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind, wenn die zugehörigen Flächen benachbart sind.

Indem man zum dualen Graphen übergeht, sieht man, dass der Vierfarbensatz äquivalent zur folgenden Aussage ist: Man kann in jedem planaren Graphen die *Knoten* derart in vier Farben färben, dass keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe haben.

Allgemein ist die **chromatische Zahl eines Graphen** die minimale Anzahl an Farben, die benötigt werden, um die Knoten einzufärben, sodass keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe haben. Die chromatische Zahl eines planaren Graphen ist mithin stets höchstens 4. Bipartite Graphen sind genau die, deren chromatische Zahl höchstens 2 ist.

## 4.2 Von Färbungen und Außerirdischen

Zum Abschluss wollen wir noch kurz auf eines der schönsten und zugleich schwierigsten Gebiete der Graphentheorie eingehen, die **Ramsey-Theorie**. Ausgangspunkt ist die folgende bekannte Aufgabe:

**Aufgabe:** Unter sechs Schülerinnen sind einige miteinander befreundet. Zeige, dass es drei gibt, die alle miteinander befreundet sind, oder drei, die alle nicht miteinander befreundet sind.

**Lösung:** Wir betrachten eine der Schülerinnen  $x$  und nehmen an, dass sie mit mindestens drei anderen Schülerinnen  $y, z, w$  befreundet ist. Sind zwei von  $y, z, w$  untereinander befreundet, haben wir eine befreundete Dreiergruppe dieser beiden mit  $x$ . Andernfalls bilden  $y, z, w$  eine nicht-befreundete Dreiergruppe. Ist  $x$  mit höchstens zwei anderen Schülerinnen befreundet, so tauschen wir die Rollen von befreundet und nicht-befreundet im obigen Argument.  $\square$

In der Sprache der Graphentheorie lässt sich die Aussage auch so umformulieren: Färben wir die Kanten eines  $K_6$  rot oder blau, so gibt es stets ein einfarbiges Dreieck. Nun liegt es nahe, sich zu fragen, ob es auch eine entsprechende Aussage für mehr als zwei Farben gibt oder ob wir (bei mehr Schülerinnen) die Existenz einer größeren (Nicht-)Freundesgruppe folgern können.

**Definition:** Gegeben seien natürliche Zahlen  $m, n \geq 2$ . Die **Ramseyzahl**  $R(m, n)$  ist die kleinste Zahl  $r$ , sodass es bei jeder Färbung der Kanten eines  $K_r$  mit rot und blau einen roten  $K_m$  oder einen blauen  $K_n$  gibt.

Die Aufgabe oben zeigt also  $R(3, 3) \leq 6$  (und tatsächlich ist es nicht schwer sich zu überlegen, dass  $R(3, 3) = 6$  gilt). Weiter folgt leicht  $R(n, 2) = n$ , denn entweder ist der gesamte  $K_n$  rot oder wir haben eine blaue Kante (also einen blauen  $K_2$ ).

Die gegebene Definition der Ramseyzahlen ist natürlich insofern keine gute, als dass sie bereits die Existenz einer solchen Zahl  $r$  voraussetzt. Zum Glück ist dies tatsächlich der Fall, wie eine Verallgemeinerung des Arguments von oben sofort zeigt:

**Satz von Ramsey:** Es ist  $R(m, n) < \infty$ . Genauer gilt (gezeigt von Erdős-Szekeres):

$$R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}.$$

**Beweis:** Mit Induktion genügt es die rekursive Aussage

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$$

zu zeigen. Dazu sei  $r_1 = R(m-1, n)$  und  $r_2 = R(m, n-1)$  und betrachten einen  $K_{r_1+r_2}$ , der mit zwei Farben gefärbt wurde, sowie einen beliebigen Knoten  $x$ . Hat  $x$  mindestens  $r_1$  rote Nachbarn, so gibt es unter diesen nach Voraussetzung einen roten  $K_{m-1}$  oder einen blauen  $K_n$ . Im zweiten Fall sind wir sofort fertig, andernfalls bildet der rote  $K_{m-1}$  zusammen mit  $x$  einen roten  $K_m$ . Hat  $x$  weniger als  $r_1$  rote Nachbarn, so muss  $x$  mindestens  $r_2$  blaue Nachbarn haben und wir können das Argument wiederholen.  $\square$

Das Argument ist ein schönes Beispiel dafür, dass es manchmal einfacher ist, eine allgemeinere Aussage zu zeigen: Selbst wenn man sich nur für die „diagonalen“ Ramseyzahlen  $R(n, n)$  interessiert (die vielleicht am natürlichsten sind), benötigen wir das allgemeine  $R(m, n)$  in unserem Beweis!

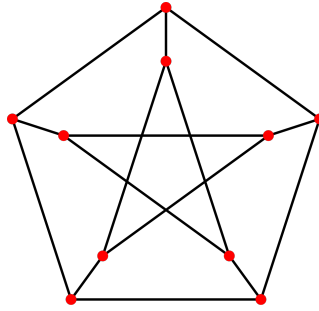
Die obere Schranke ist im Allgemeinen nicht scharf: Zum Beispiel zeigt sie  $R(3, 4) \leq 10$ , man kann aber  $R(3, 4) = 9$  zeigen. Bekannt ist weiterhin  $R(4, 4) = 18$ , aber über  $R(5, 5)$  wissen wir nur  $43 \leq R(5, 5) \leq 46$ , der Wert von  $R(6, 6)$  liegt zwischen 102 und 160.

Über die Bestimmung der Ramsey-Zahlen gibt es die folgende Anekdote von Paul Erdős, der gesagt haben soll: „Angenommen, Außerirdische würden die Erde überfallen und drohen, sie in einem Jahr zu vernichten, wenn die Menschheit nicht die Ramsey-Zahl  $R(5, 5)$  findet. Wir könnten die besten Köpfe der Welt und die schnellsten Computer zusammentrommeln, und innerhalb eines Jahres könnten wir den Wert wahrscheinlich berechnen. Wenn die Außerirdischen jedoch die Ramsey-Zahl  $R(6, 6)$  verlangten, hätten wir keine andere Wahl, als einen Präventivschlag zu starten.“

Selbst die ungefähre Größe der Ramseyzahlen zu bestimmen, ist ein sehr schweres Problem: Für die diagonalen Ramseyzahlen  $R(n, n)$  liefert unser Argument eine obere Schranke, die nicht wesentlich besser ist als  $R(n, n) < 4^n$ , wohingegen die beste bekannte untere Schranke nicht viel besser als  $R(n, n) > (\sqrt{2})^n$  ist. Erst 2023 konnte gezeigt werden, dass man die 4 in der oberen Schranke durch eine etwas kleinere Konstante ersetzen kann (Weltrekord aktuell: 3.7792...).

### 4.3 Aufgaben

**Aufgabe 4.1:** Ist der Petersen-Graph planar?



**Aufgabe 4.2:** Die Kanten eines  $K_{17}$  werden in rot, blau und smaragdgrün gefärbt. Zeige: Es gibt ein einfarbiges Dreieck.

**Aufgabe 4.3:** Gibt es einen (beschränkten konvexen) Polyeder, dessen sämtliche Außenflächen Sechsecke sind?

**Aufgabe 4.4:** Wie viele Kanten kann ein Graph auf  $n$  Knoten maximal haben, der keinen Kreis gerader Länge besitzt?

**Aufgabe 4.5:** Gegeben sei ein beliebiger Graph mit endlich vielen Knoten. Wir dürfen beliebig oft eine der folgenden Operationen durchführen:

- (i) einen Knoten mit ungeradem Grad aus dem Graphen entfernen
- (ii) den Graphen *verdoppeln*, d.h. für jeden Knoten  $v$  einen Knoten  $v'$  einführen, wobei  $v'$  und  $w'$  genau dann verbunden sind, wenn  $v$  und  $w$  verbunden sind, und außerdem  $v$  und  $v'$  verbunden sind.

Zeige, dass es möglich ist, mit endlich vielen solcher Operationen einen Graphen ohne Kanten zu erzeugen.

**Aufgabe 4.6:** Eine Ameise krabbelt auf einem (beschränkten konvexen) Polyeder, bei dem jede Ecke an genau drei Flächen grenzt und das für jedes  $n$  gerade viele  $n$ -Ecke als Außenflächen besitzt.

Die Ameise krabbelt entlang der Kanten auf einem geschlossenen Weg, der sich nicht selbst schneidet. Es stellt sich heraus, dass dieser das Polyeder so in zwei Teile zerlegt, dass für jedes  $n$  in beiden Teilen gleich viele  $n$ -Ecke vorkommen. Zeige, dass die Ameise auf ihrem Weg an den Ecken genauso oft rechts wie links abgelenkt ist.

**Aufgabe 4.7:** Die *Kreuzungszahl* eines Graphen sei die minimale Anzahl von Kantenpaaren, die sich kreuzen, wenn man den Graphen in der Ebene zeichnet. (Planare Graphen sind also genau solche mit Kreuzungszahl 0.) Sei  $G$  ein Graph mit  $E$  Knoten und  $K$  Kanten.

- (a) Zeige, dass die Kreuzungszahl immer mindestens  $K - 3E$  ist.
- (b) Zeige: Ist  $K > 4E$ , dann ist die Kreuzungszahl mindestens  $\frac{K^3}{64E^2}$ .

Das bedeutet zum Beispiel, dass sich im  $K_n$  für große  $n$  sogar mindestens 1% der Kantenpaare kreuzen müssen, egal wie man ihn zeichnet. (Warum?)

(Tipp: Wende in (b) die Aussage (a) für einen zufällig ausgewählten Teilgraphen an.)

**Aufgabe 4.8:** Jede Seitenfläche eines regulären Dodekaeders liegt in einer eindeutig bestimmten Ebene. Diese Ebenen zerteilen den Raum in eine endliche Anzahl von disjunkten Raumteilen. Wie viele?